FICHE 6.5 : INTÉGRATION PAR PARTIES

Mise à jour : 20/03/12

Voici une fiche, assez simple, te permettant de comprendre une des principales méthodes d'intégration : l'intégration par parties. En fait, on devrait réellement parler ici de primitivation par parties car le mot « intégration » sous-entend la présence de « bornes » mais bon…. Tant pis pour les puristes !

L'entièreté de cette méthode repose sur la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions que nous baptiserons classiquement : f et g.

$$(f \,.\, g)' = f\,' \,.\, g + f \,.\, g\,'$$

Et donc

$$\int (f \,.\, g)' \,dx = \int (f\,' \,.\, g + f \,.\, g\,') \,dx$$

$$f \,.\, g = \int f\,' g \,dx + \int f g\,' \,dx$$

On aboutit finalement à la formule *(première version)*

$$\int f\,' g \,dx = f \,.\, g - \int f g\,' \,dx$$

ou à l'autre version *(seconde version)*

$$\int f g\,' \,dx = f \,.\, g - \int f\,' g \,dx$$

Suivant les écoles (et les professeurs), tu auras vu la première ou la seconde version de cette formule. Quoiqu'il en soit, cela ne change strictement rien ! Pour la suite de cette fiche, nous allons nous baser sur la première version.

$$\int f\,' g \,dx = f \,.\, g - \int f g\,' \,dx$$

Comme toujours, rien n'est plus clair qu'un exemple . Soit la primitive suivante à résoudre :

$$\int \cos x \,.\, x \,dx$$

Pour pouvoir appliquer la formule énoncée dans l'encadré rouge, il faut que tu fasses un parallélisme entre l'exercice proposé et la formule.

FORMULE	$\int f'\, g\, dx$	=	$f \,.\, g - \int f\, g'\, dx$
EXERCICE PROPOSÉ	$\int \cos x \,.\, x\, dx$	=	

Une des deux fonctions sera appelée f' et l'autre g. Beaucoup d'étudiants – sans réfléchir – choisissent $f' = \cos x$ et $g = x$. Pourquoi ? Simplement parce que cos x est la première des deux fonctions. L'exercice proposé aurait été

$$\int x \,.\, \cos x\, dx$$

que les mêmes étudiants auraient choisi $f' = x$ et $g = \cos x$. Or l'exercice est le même puisqu'il s'agit d'un produit de deux facteurs et 5 . 2 = 2 . 5 !

Or, le choix initial des deux fonctions est très important ! C'est de lui que va dépendre ta facilité à résoudre (ou non) la primitive proposée. Tu dois toujours choisir comme candidat g, la fonction dont la dérivée se rapproche le plus d'une constante (quand c'est possible, bien entendu). Ce n'est pas une règle absolue, mais c'est ainsi dans la majorité des situations.

Dans notre exemple, si tu choisis $g = x$, alors $g' = 1$.
si tu choisis $g = \cos x$, alors $g' = -\sin x$

C'est donc le choix de $g = x$ qui s'impose. Il est donc évident que $f' = \cos x$.

Une fois le choix des deux fonctions f' et g effectué, le plus difficile est fait ! Ensuite, il ne te reste qu'à appliquer l'algorithme (le procédé) de résolution suivant.

a) <u>Tu remplis ce tableau les fonctions choisies</u>

$f(x) =$	$g(x) = x$
$f'(x) = \cos x$	$g'(x) =$

b) <u>Tu complètes les cases vides du tableau</u>

$f(x) = \sin x$	$g(x) = x$
$f\,'(x) = \cos x$	$g\,'(x) = 1$

c) <u>Tu appliques la formule</u>

$$\int f\,'\,g\;dx \quad = \quad f\,.\,g \quad - \quad \int f\,g\,'\,dx$$

$$\int \cos x\,.\,x\;dx \quad = \quad \sin x\,.\,x \quad - \quad \int \sin x\,.\,1\;dx$$

$$= \quad \sin x\,.\,x \quad - \quad \int \sin x\;dx$$

$$= \quad \sin x\,.\,x \quad - \quad (-\cos x)$$

$$= \quad \sin x\,.\,x \quad + \cos x$$

Comme expliqué ci-dessus, la seule difficulté de cette méthode est de bien choisir tes deux fonctions.