FICHE 6.8 : SCHÉMA DE BERNOUILLI ET LOI BINÔMIALE

Mise à jour : 13/06/12

1. ÉPREUVE DE BERNOUILLI

Une épreuve de Bernouilli est simplement une expérience aléatoire (c'est-à-dire une expérience dont on ne connait pas le résultat à l'avance) qui ne peut comporter que deux issues, appelées **succès** (parfois réussite) et **échec**.

Exemple classique : le lancement d'une pièce de monnaie. Il n'y a que deux issues possibles : soit le résultat est **pile**, soit le résultat est **face**. Suivant l'énoncé, le succès est attribué au pile et l'échec au face ou vice-versa.

Autre exemple : une urne contient 20 boules dont 15 sont bleues et 5 sont vertes. On prend une boule au hasard et on observe sa couleur. Il s'agit bien d'une épreuve de Bernouilli puisque les seules issues sont **la couleur bleue** ou **la couleur verte**.

Voici un exemple un peu plus subtil : une urne contient 20 boules dont 12 sont bleues, 5 sont vertes et 3 sont blanches. On prend une boule au hasard et on observe si elle est bleue. Quand on prend une boule et qu'on observe sa couleur, il y a bien 3 issues possibles : bleue, verte ou blanche. Cependant, il s'agit bien d'une épreuve de Bernouilli car la seule chose qui t'intéresse est que cette boule soit **bleue** ou **non**. C'est donc un succès si elle est bleue, un échec sinon.

Tu dois donc bien retenir qu'une épreuve de Bernouilli ne peut déboucher que sur deux résultats : l'un sera appelé succès et l'autre échec.

2. SCHÉMA DE BERNOUILLI

Un schéma de Bernouilli est une expérience aléatoire où on répète plusieurs fois une **même** épreuve de Bernouilli.

Par exemple : on lance 10 fois une pièce de monnaie et on observe le nombre de piles. Comme expliqué ci-dessus, **chaque expérience est bien une épreuve de Bernouilli** mais comme on recommence **l'expérience 10 fois**, c'est bien un **schéma de Bernouilli**.

Ou encore : une urne contient 20 boules dont 15 sont bleues et 5 sont vertes. On prend une boule au hasard, on observe sa couleur et **on la remet dans l'urne**. Si tu fais cette **expérience 12 fois**, il s'agit bien d'un schéma de Bernouilli. Remarque bien que la proposition « **on la remet dans l'urne** » est une phrase capitale car si ce n'était pas le cas, la probabilité du succès varierait à chaque expérience et du coup, ce ne serait plus un schéma de Bernouilli. Car un **schéma de Bernouilli** est une expérience aléatoire où on répète plusieurs fois une **même** épreuve de Bernouilli **(aucun paramètre ne peut varier lors de la répétition des expériences !)**

3. LOI BINÔMIALE

Maintenant que tu peux indentifier une expérience aléatoire qui suit un schéma de Bernouilli, tu pourras répondre à toutes les questions du type :

- Quelle est la probabilité d'obtenir 7 fois face lorsque je lance 12 fois une pièce de monnaie ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir 6 boules bleues si tu prends une boule au hasard dans une urne qui en contient 20 (15 bleues et 5 vertes), que tu observes sa couleur, que tu **la remettes dans l'urne** et que tu répètes cette expérience 11 fois.

En effet, chaque fois qu'une expérience suit un schéma de Bernouilli, pour déterminer la probabilité cherchée, tu pourras appliquer la loi suivante, appelée **loi binômiale** :

$$P(X = k) = C_n^k \; p^k \; (1 - p)^{n - k}$$

Ne t'enfuis pas !!!! Autant cette formule a une apparence monstrueuse, autant elle est pourtant simple d'application. Décortiquons chaque élément de la formule en prenant l'exemple concret suivant :

Quelle est la probabilité d'obtenir 7 fois face lorsque je lance 12 fois une pièce de monnaie ?

$P(X = k)$ L'expérience est de jeter une pièce de monnaie et le succès est d'obtenir face. Le nombre de succès que tu désires est 7. Donc, k = 7

C_n^k Le « k » est donc le nombre de succès. Le « n » représente le nombre de fois où tu réalises l'expérience. Dans cet exemple n = 12

p^k

« p » représente la probabilité du succès. Si la pièce n'est pas truquée, il y a autant de chances qu'elle tombe sur pile que sur face. Donc p = 1/2

Dans notre exemple bien précis, la réponse à la question est

$$P(X = 7) = C_{12}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12 - 7}$$

$$P(X = 7) = C_{12}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

Et en principe, l'analyse combinatoire t'a appris que $C_{12}^{7} = \dfrac{12\,!}{7\,!\,5\,!} = 792$

$$P(X = 7) = 792 \,.\, 0{,}0078125 \,.\, 0{,}03125$$

$$P(X = 7) = 0{,}193359375$$

La probabilité d'obtenir 7 fois face lorsque tu lances 12 fois une pièce de monnaie est donc de 19,33%

Si c'est la première fois que tu appliques la loi binômiale sur un exemple, c'est normal que tu sois peut-être un peu perplexe… Mais c'est TOUJOURS le même principe. Voici un deuxième exemple.

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 boules bleues si tu prends une boule au hasard dans une urne qui en contient 20 (15 bleues et 5 vertes), que tu observes sa couleur, que tu ***la remettes dans l'urne*** *et que tu répètes cette expérience 11 fois.*

$P(X = k)$ L'expérience est de tirer une boule et d'observer sa couleur et le succès est d'obtenir une boule bleue. Le nombre de succès que tu désires est 6. Donc, k = 6

C_n^k Le « k » est donc le nombre de succès. Le « n » représente le nombre de fois où tu réalises l'expérience. Dans cet exemple n = 11

p^k « p » représente la probabilité du succès. Il y a 20 boules dont 15 sont bleues. La probabilité d'obtenir une boule bleue est donc de 15/20. Donc p = 15/20

Dans notre exemple bien précis, la réponse à la question est

$$P(X = 6) = C_{11}^{6} \left(\frac{15}{20}\right)^{6} \left(1 - \frac{15}{20}\right)^{11-6}$$

$$P(X = 6) = C_{11}^{6} \left(\frac{15}{20}\right)^{6} \left(\frac{5}{20}\right)^{5}$$

Et en principe, l'analyse combinatoire t'a appris que $C_{11}^{6} = \dfrac{11\,!}{6\,!\,5\,!} = 462$

$$P(X = 6) = 462 \,.\, 0{,}177978515625 \,.\, 0{,}0009765625$$

$$P(X = 6) = 0{,}0802989006\ldots$$

La probabilité d'obtenir 6 boules bleues est donc de 8,02%