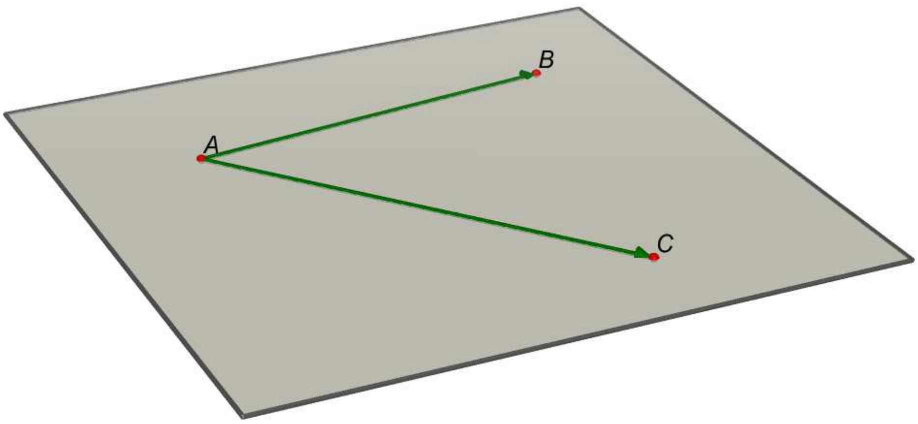
FICHE 6.7 : ÉQUATIONS D'UN PLAN DANS L'ESPACE

Mise à jour : 07/06/12

De même que pour les équations d'une droite, il y a trois types d'équations de plans : **l'équation vectorielle**, **les équations paramétriques** et enfin les **équations cartésiennes**.

1. ÉQUATION VECTORIELLE

Une équation vectorielle est une équation dans laquelle se trouvent des vecteurs. Celle-ci va donner une condition pour qu'un point quelconque (appelé souvent X) appartienne à **un plan** passant par **trois points** (le plus souvent désignés par A, B et C).



X $\in$ plan α si et seulement si $\overrightarrow{AX} = k\ \overrightarrow{AB} + m\ \overrightarrow{AC}$ (k et m $\in \mathbb{R}$)

2. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Les équations paramétriques d'un plan α s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{cases} x = k\,u_1 + m\,w_1 + a_1 \\ y = k\,u_2 + m\,w_2 + a_2 \\ z = k\,u_3 + m\,w_3 + a_3 \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ (u_1, u_2, u_3) est juste un **vecteur directeur** du plan α
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ (w_1, w_2, w_3) est juste un **autre vecteur directeur** du plan α

Le point A (a_1, a_2, a_3) est **un point** par lequel passe le plan α

<u>Remarque</u> : le deuxième vecteur directeur que tu choisis ne doit pas être parallèle au premier. Algébriquement, cela signifie que le composantes de l'un ne peuvent pas être multiples des composantes de l'autre. Si ton premier vecteur directeur est $\overrightarrow{u}$ (1, 3, 4) alors, $\overrightarrow{w}$ ne peut pas être (2, 6, 8)

3. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Les équations cartésiennent d'un plan s'écrivent comme suit :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

A, B et C sont les composantes d'un **<u>vecteur normal</u>** au plan
D est l'intersection du plan à l'origine (lorsque x, y et z égalent 0).

Contrairement aux équations paramétriques, tu ne sais pas écrire directement les équations cartésiennes du plan car bien souvent, on ne te donne pas de vecteur normal, ni l'intersection à l'origine. Le mieux est que tu te réfères à l'exemple ci-dessous pour bien comprendre !

<u>Exemple</u>

Supposons qu'on te demande d'écrire les équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes du plan passant par les points A (-2, 5, 6) et B (1, -1, 4) et C (-2, 4, 0)

- Pour l' équation vectorielle, c'est la plus facile, elle ne dépend pas des valeurs de A, de B et C. Ce sera donc toujours $\overrightarrow{AX} = k\ \overrightarrow{AB} + m\ \overrightarrow{AC}$

- Pour les équations paramétriques, tu dois d'abord déterminer deux vecteurs directeurs (nous te rappelons qu'un vecteur directeur est un vecteur qui a une direction parallèle à celle du plan). Le plus simple est de prendre les vecteurs constitués par deux points donnés : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Si tu ne sais plus comment calculer les composantes d'un vecteur, n'hésite pas à consulter la fiche « Généralités dans l'espace ».

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1 - (-2) ; (-1) - 5 ; 4 - 6) \\ &= (3, -6, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (-2 - (-2) ; 4 - 5 ; 0 - 6) \\ &= (0, -1, -6) \end{aligned}$$

Tu as aussi besoin d'un point de la droite, tu peux donc prendre le point A (-2, 5, 6) ou le point B (1, -1, 4) ou même le point C (-2, 4, 0)

Si tu as choisi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme vecteurs directeurs du plan et le point A, **<u>les équations paramétriques</u>** du plan α s'écriront donc :

$$\begin{cases} x = k\,3 + m\,0 + (-2) \\ y = k\,(-6) + m\,(-1) + 5 \\ z = k\,(-2) + m\,(-6) + 6 \end{cases} \quad \text{ou encore mieux} \quad \begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -6k - m + 5 \\ z = -2k - 6m + 6 \end{cases}$$

- Pour les équations cartésiennes d'un plan α, si on te donne les composantes d'un vecteur normal, c'est alors très simple. En effet, l'équation générale cartésienne d'un plan α s'écrit

$$\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

où (A, B, C) sont les composés sont les composantes d'un vecteur normal.

Si tu sais effectivement que le vecteur normal de α noté très souvent $\overrightarrow{n_\alpha}$ a pour composantes (34, 18, -3) alors

$$\alpha \equiv 34x + 18\,y - 3z + D = 0$$

Pour déterminer D, il suffit maintenant de remplacer x, y et z par un point quelconque du plan. Prenons B (1, -1, 4). (Mais tu aurais pu prendre A (-2, 5, 6) ou C(-2, 4, 0))

$$34.1 + 18.(-1) - 3.(4) + D = 0$$
$$34 - 18 - 12 + D = 0$$
$$D = -4$$

$$\alpha \equiv 34x + 18y - 3z - 4 = 0$$

- Si on ne te donne pas les composantes du vecteur normal, tu dois alors le déterminer. Comment ? En utilisant par exemple… **le produit vectoriel** de deux vecteurs directeurs. Si tu ne sais plus comment appliquer le produit vectoriel, télécharge la fiche à ce sujet !

$$\overrightarrow{AB} = (3,\ -6,\ -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,\ -1,\ -6)$$

$$\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{AC} = (34,\ 18,\ -3)$$

- Il arrive parfois, pour différentes raisons, que l'outil produit vectoriel n'est pas vu en classe. Il faut alors procéder autrement en partant des équations paramétriques.

$$\begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -6k - m + 5 \\ z = -2k - 6m + 6 \end{cases}$$

(1) Isole un des deux paramètres (celui qui semble le plus simple, ici, c'est clairement k)

$$\begin{cases} k = \dfrac{x + 2}{3} \\ y = -6k - m + 5 \\ z = -2k - 6m + 6 \end{cases}$$

(2) Injecte la valeur trouvée dans la deuxième équation et isole le second paramètre (ici, le second paramètre, c'est m)

$$y = -6\left(\frac{x + 2}{3}\right) - m + 5$$

$$m = -6\left(\frac{x + 2}{3}\right) - y + 5$$

(3) Injecte la valeur trouvée dans la dernière équation

$$z = -2k - 6m + 6$$

$$z = -2\left(\frac{x+2}{3}\right) - 6\left(-6\left(\frac{x+2}{3}\right) - y + 5\right) + 6$$

$$z = \frac{-2x-4}{3} - 6\left(\frac{-6x-12-3y+15}{3}\right) + 6$$

$$z = \frac{-2x-4}{3} - 6\left(\frac{-6x-3y+3}{3}\right) + 6$$

$$z = \frac{-2x-4+36x+18y-18+18}{3}$$

$$z = \frac{34x+18y-4}{3}$$

$$3z = 34x + 18y - 4$$

$$34x + 18y - 3z - 4 = 0$$

Cette méthode n'est pas difficile. Elle est juste plus longue et demande beaucoup de concentration de ta part car nombreuses sont les erreurs en cours de route…

Tu trouves évidemment la même réponse que tu passes par le produit vectoriel ou non.

QUELLES TYPES D'ÉQUATIONS PRIVILÉGIER ?

Tout dépend de ce qu'on te demande de faire mais les raisons sont les mêmes que pour les équations de droites !

- Lorsque tu veux vérifier qu'un point appartient à un plan, il est mieux de privilégier les équations cartésiennes. Le point C (-2,4,1) appartient-il au plan α dont les équations cartésiennes sont

$$\alpha \equiv 34x + 18y - 3z - 4 = 0$$

Pour le savoir, il suffit que tu remplaces dans cette équation **x** par **(-2)**, **y** par **4** et **z** par **1** et de voir si l'équation est vérifié ou non !

$$34(-2) + 18(4) - 3(1) - 4 \text{ ?=? } 0$$
$$-68 + 72 - 3 - 4 \text{ ?=? } 0$$
$$-3 \text{ ?=? } 0$$

NON ! Donc, le point C n'appartient pas au plan !

- Par contre, si on te demande de trouver un point supplémentaire du plan, tu utiliseras plutôt les équations paramétriques. Ainsi, si tu dois trouver un autre point du plan α dont les équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -6k - m + 5 \\ z = -2k - 6m + 6 \end{cases}$$

il suffit que tu remplaces k et m par la valeur de ton choix. Ainsi en remplaçant par exemple k par 2 et m par 1, tu détermines E (4, -8, -4) un nouveau point du plan !

Tu n'as pas compris quelque chose ? Aide-nous à améliorer ces fiches !

Tu cherches des sujets que tu n'as pas trouvés ? Dis-le nous !

Découvre aussi notre forum sur lequel tu peux venir poser tes questions.

N'hésite pas à nous faire connaître : totalement gratuit.

Commentaires, souhaits, remarques…

On t'attend sur notre groupe Facebook !
« Centre de remédiation scolaire Entr'aide »