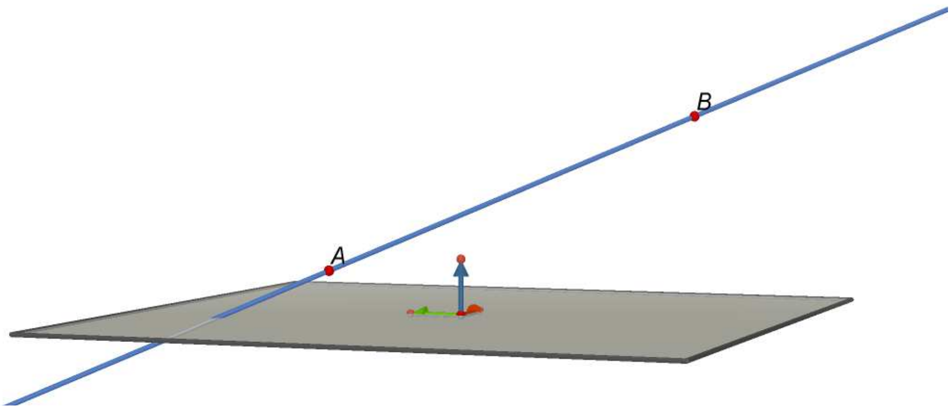
FICHE 6.6 : ÉQUATIONS D'UNE DROITE DANS L'ESPACE

Mise à jour : 28/05/12

Bien entendu, tu sais depuis la 3e année que l'équation cartésienne d'une droite est $y = mx + p$. C'est vrai… lorsque tu travailles dans le plan, c'est-à-dire en deux dimensions. Lorsque tu travailles dans l'espace (en 3 dimensions), les choses sont un peu plus compliquées. D'abord, tu dois savoir qu'il y a trois types d'équations : **l'équation vectorielle**, **les équations paramétriques** et enfin les **équations cartésiennes.**

1. ÉQUATION VECTORIELLE

Une équation vectorielle est une équation dans laquelle se trouvent des vecteurs. Celle-ci va donner une condition pour qu'un point quelconque (appelé souvent X) appartienne à une droite passant par deux points (le plus souvent désignés par A et B).



$X \in$ droite AB si et seulement si $\overrightarrow{AX} = k\,\overrightarrow{AB}$

2. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Les équations paramétriques d'une droite s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{cases} x = k\,u_1 + a_1 \\ y = k\,u_2 + a_2 \\ z = k\,u_3 + a_3 \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ (u_1, u_2, u_3) est juste un **vecteur directeur** de la droite d

Le point A (a_1, a_2, a_3) est **un point** par lequel passe la droite d.

3. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Les équations cartésiennent d'une droite s'écrivent comme suit :

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

Le vecteur $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3) est juste un **vecteur directeur** de la droite d
Le point A (a_1, a_2, a_3) est **un point** par lequel passe la droite d.

Exemple

Supposons qu'on te demande d'écrire les équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes de la droite passant par les points A (-2, 5, 6) et B (1, -1, 4)

- Pour l' équation vectorielle, c'est la plus facile, elle ne dépend pas des valeurs de A et de B. Ce sera donc toujours $\overrightarrow{AX} = k\ \overrightarrow{AB}$.

- Pour les équations paramétriques, tu dois d'abord déterminer un vecteur directeur (c'est-à-dire un vecteur qui a une direction parallèle à celle de la droite). Le plus simple est de prendre le vecteur constitué par les deux points donnés : $\overrightarrow{AB}$. Si tu ne sais plus comment calculer les composantes d'un vecteur, n'hésite pas à consulter la fiche « Généralités dans l'espace ».

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1 - (-2) ; (-1) - 5 ; 4 - 6) \\ &= (3, -6, -2) \end{aligned}$$

Tu as aussi besoin d'un point de la droite, tu peux donc prendre le point A (-2, 5, 6) ou le point B (1, -1, 4).

Si tu choisis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur et la point A, **les équations paramétriques** de la droite AB s'écriront donc :

$$\begin{cases} x = k\,3 + (-2) \\ y = k\,(-6) + 5 \\ z = k\,(-2) + 6 \end{cases} \quad \text{ou encore mieux} \quad \begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -6k + 5 \\ z = -2k + 6 \end{cases}$$

- Enfin, pour les équations cartésiennes, si tu choisis le même point A et le même vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, tu obtiendras :

$$\frac{x-(-2)}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-6}{-2} \qquad \text{ou encore mieux} \qquad \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-6}{-2}$$

QUELLES TYPES D'ÉQUATIONS PRIVILÉGIER ?

Tout dépend de ce qu'on te demande de faire !

- Lorsque tu veux vérifier qu'un point appartient à une droite, il est mieux de privilégier les équations cartésiennes. Le point C (-2,4,1) appartient-il à la droite d dont les équations cartésiennes sont

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-6}{-2}$$

Pour le savoir, il suffit que tu remplaces dans cette équation **x** par **(-2)**, **y** par **4** et **z** par **1** et de voir si l'équation est vérifié ou non !

$$\frac{-2+2}{3} \mathrel{?=?} \frac{4-5}{-6} \mathrel{?=?} \frac{1-6}{-2}$$

$$0 \mathrel{?=?} \frac{1}{6} \mathrel{?=?} \frac{5}{2}$$

NON ! Donc, le point C n'appartient pas à la droite !

- Par contre, si on te demande de trouver un point supplémentaire de la droite, tu utiliseras plutôt les équations paramétriques. Ainsi, si tu dois trouver un autre point de la droite d dont les équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -6k + 5 \\ z = -2k + 6 \end{cases}$$

il suffit que tu remplaces k par la valeur de ton choix (sauf 0 et 1 qui te rendraient les points A (-2,5,6) et B (1,-1,4) déjà connus. Ainsi en remplaçant par exemple k par 2, tu détermines D (4, -7, 2) un nouveau point de la droite !

.