FICHE 6.3 : ANALYSE COMBINATOIRE (1)

Mise à jour : 27/12/11

L'analyse combinatoire est vraiment une matière « à part » de ce que tu as l'habitude de faire dans le cadre du cours de math. Ici, pas de « x^2» qui se balade mais juste des questions du style « Combien de … ». Bref, dans cette fiche, nous allons parler **dénombrement**.

1. PRINCIPE FONDAMENTAL DE DENOMBREMENT

Supposons que pour t'aider à choisir un objet (une voiture par exemple), on te pose 3 questions (le modèle, **la couleur**, la motorisation). Pour le modèle, tu as 5 propositions différentes, pour la couleur tu en as 7 et pour la motorisation, tu en as 3. Alors, pour déterminer le nombre de voitures différentes, **tu dois effectuer l'opération** (5.7.3) soit 105 voitures différentes !

Cela s'explique très simplement par le schéma suivant :

Modèle	Couleur	Motorisation
A	1	M_1
B	2	M_2
C	3	M_3
D	4	
E	5	
	6	
	7	

Prends un crayon et relie **A-1-M_1**, cela fait 1 choix. Relie **A-1-M_2**, cela fait un 2$^{\text{ème}}$ choix, puis **A-1-M_3**, maitenant tu continues avec **A-2-M_1**, puis **A-2-M_2**…

> Si tu es confronté(e) à **plusieurs choix à faire**, que le premier choix te donne **p** réponses possibles, le second choix **q** réponses possibles et le troisième choix **r** réponses possibles, alors, **le nombre total de choix total est : p . q . r**

Tu l'auras certainement compris, cette formule peut se généraliser à autant de choix que désirés.

2. PERMUTATIONS D'OBJETS DIFFERENTS

On utilise l'expression « permutation d'objets différents » lorsque tous les objets sont différents et qu'on essaie de les ranger dans un certain ordre (ce qui signifie « **classer** »). Les exemples les plus classiques sont : *de combien de façons 12 enfants peuvent-ils se ranger en file indienne, combien de « mots » peut-on écrire avec les lettres du mots « MANGER »…*

Pour les enfants, ils sont tous différents et on essaie de dénombrer les rangements possibles.

Pour les « mots » (pas au sens de la langue française évidemment, on considèrera donc que GNAMRE est un mot), toutes les lettres du mot MANGER sont différentes et on essaie de les ranger dans tous les ordres possibles.

À toutes ces questions, la réponse est … **LA FACTORIELLE !**

5 ! *(se lit FACTORIELLE 5)* = 5.4.3.2.1 = 120

La réponse pour les enfants est donc 12 ! = 479 001 600
La réponse pour les mots est donc 6 ! = 720

> Si on te demande le nombre de manières de **classer** **n** objets sachant que **tous les objets sont différents les uns des autres,** la réponse est simplement **n !**

3. PERMUTATIONS D'OBJETS IDENTIQUES

Un poil plus compliqué… À présent, considérons dans un premier exemple les lettres du mot « MAGASIN ». La réponse n'est plus 7 ! parce que la lettre « **A** » se répète 2 fois. Il faut donc diviser ce (7 !) par (2!) puisqu'il n'y a qu'une seule lettre qui se répète 2 fois. Si tu envisages le mot « **MAMA**N », le nombre de mots est 5 ! / (**2 !** . **2 !**) car la lettre « **M** » se répète 2 fois ainsi que la lettre « **A** ».

Un dernier exemple : le mot « **MURMURER** » peut générer 8 ! / (**2 !** . **2 !** . **3 !**) « mots » différents. 8 ! car il y a 8 lettres dans le mot, (**2 !**) car il y a 2 « **M** », même chose pour les 2 « **U** » et (**3 !**) car il y a 3 fois la lettre « **R** ».

> Si on te demande le nombre de manières de **classer** **n** objets sachant qu' **un objet se répète** **p** **fois et un autre** **q** **fois** la réponse est $\dfrac{n\,!}{p\,!\;q\,!}$

4. ARRANGEMENTS D'OBJETS DIFFERENTS

Désolé pour la terminologie mais « arrangement » est le mot officiel… En fait, cela ressemble très fort au cas des permutations mais **tu ne prends pas tous les objets**.

Par exemple, tu as 15 crayons de couleurs différentes, *de combien de façons différentes peux-tu en choisir 4 et les* ***classer*** ? Autrement dit, non seulement **la nature des objets** a de l'importance (tu prends le bleu, le noir, le rouge…) mais aussi **l'ordre des objets** a de l'importance (le fait de prendre d'abord le bleu et puis le noir donne un ordre différent…)

La réponse est simplement : 15 . 14 . 13 . 12. Tu t'arrêtes là car tu devais choisir 4 crayons (il y a donc 4 termes à prendre dans la multiplication : 15, 14, 13 et 12). Si on t'avait autorisé à choisir 6 crayons, tu aurais écrit : 15.14.13.12.11.10 (il y a ainsi 6 nombres écrits).

> Si on te demande le nombre de manières de **classer** **p** **objets parmi** **n** **objets disponibles** sachant que **tous les objets sont différents les uns des autres,** la réponse est
> $n \cdot (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$

La formule ci-dessus peut te paraître un peu rebutante, mais alors retiens s'implement qu'on écrit autant de termes que l'on choisit d'objets. Si on te demande de choisir 5 prénoms dans une liste de 20 prénoms et de les classer, alors il y a 20 . 19 . 18 . 17 . 16 choix possibles (cela fait bien 5 termes d'écrits et d'autre part 20 – 5 + 1 =…. 16 *(Appliquer la formule te donne donc le même résultat)*

5. COMBINAISON D'OBJETS DIFFÉRENTS

À nouveau une terminologie particulière. Une « combinaison » ressemble très fort à un « arrangement » à une différence essentielle près : **l'ordre n'a plus d'importance**.

Pour reprendre l'exemple précédent, tu as 15 crayons de couleurs différentes, *de combien de façons différentes peux-tu en choisir 4* ? Tu ne les classes pas !!!. Autrement dit seulement **la nature des objets** a de l'importance (tu prends le bleu, le noir, le rouge…). **Le fait que tu choisisses d'abord le bleu et puis le noir n'a plus aucune importance !**

Dans ce cas, la formule précédente va être légèrement modifiée. On va diviser la réponse qu'on aurait obtenue dans le cas précédent par la factorielle du nombre d'objets choisis. Compliqué à écrire mais très facile à faire.

Dans le cas de nos crayons de couleur : cela donne simplement $\dfrac{15.14.13.12}{4\,!}$

Si on te demande le nombre de manières de **choisir (choisir est différent de classer !!!)** **p objets parmi n objets disponibles** sachant que **tous les objets sont différents**

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p\,!}$$

6. LIEN AVEC TON COURS

Nous espérons que toutes les explications ci-dessus sont claires (sinon, n'hésite pas à nous envoyer tes remarques ou à poser tes questions sur notre forum). Mais il est possible que dans ton cours, ce soit légèrement expliqué (ou noté) autrement.

Laisse-nous te montrer le lien…

ARRANGEMENT

Tout d'abord, la plupart du temps, quand on parle d'arrangement, on code ce qu'on veut dire.

Par exemple, si tu considères un arrangement de 6 objets parmi 9 objets, on le note A_9^6. C'est simplement une notation qui te permet ainsi de gagner du temps.

Quand tu envisages donc un arrangement de p objets parmi n objets, tu noteras donc A_n^p

Et plutôt que d'utiliser la formule exposée au point 4, on te dira peut-être : $A_n^p = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$

Pas de panique, **c'est la même chose !** L'avantage de cette présentation, c'est qu'on y gagne en calcul *(la plupart des calculatrices le font directement, il suffit que tu tapes 5 A 7 et tu as la réponse directement de* A_7^5). L'inconvénient, c'est qu'on y perd en sens car certains élèves ne voient plus d'où vient la formule….

COMBINAISON

Même remarque que pour les arrangements : on code ce qu'on veut dire. Quand tu envisages une combinaison de p objets parmi n objets, tu noteras C_n^p.

Et plutôt que d'utiliser la formule exposée au point 5, on te dira sans doute : $C_n^p = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!\,p\,!}$

Mais…. c'est de nouveau exactement la même chose !

ARRANGEMENTS D'OBJETS POUVANT SE RÉPÉTER

Enfin, dans beaucoup de cours, tu trouveras aussi des arrangements avec répétitions. Il s'agit alors de prendre p objets parmi n *(les n objets sont eux tous différents)*, de les **classer**, mais **chaque objet peut être pris plusieurs fois si on veut**.

Par exemple, une urne contient une boule jaune, une rouge et une blanche. L'expérience consiste à prendre une boule, regarder sa couleur et la remettre dans l'urne. Si on te demande le nombre de façons **de choisir 8 boules et de les classer**… c'est bien un arrangement avec répétitions puisque non seulement **la nature des objets** a de l'importance (tu prends la rouge, la blanche …) mais aussi **l'ordre des objets** a de l'importance (le fait de prendre d'abord la bleue et puis la noire donne un ordre différent…).

On peut alors te donner la formule suivante $\alpha_n^p = n^p$ *(p est le nombre d'objets qu'on choisit et n est le nombre d'objets différents mis à disposition. On note alors α à la place de A afin de différencier les arrangements avec répétitions de ceux sans répétition)*

Ce n'est pourtant rien d'autre qu'une application du point 1, le principe fondamental de dénombrement ! Reprenons notre exemple avec les boules de l'urne.

Si tu appliques la formule : $\alpha_3^8 = 3^8$ (6 561)

Si tu appliques le principe fondamental : tu choisis ta première boule, tu as donc 3 choix possibles (jaune, rouge ou blanche). Tu choisis une 2e boule : tu as de nouveau 3 choix (puisque la boule que tu as choisie a été remise dans l'urne). Le principe de dénombrement te précise (comme avec la voiture) que le nombre de possibilités est de 3 x 3 = 9. Maintenant, si tu réalises 8 fois l'expérience, tu as donc 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 3^8 (6 561)

Attention, pour plus de clarté, il était préférable d'utiliser une disposition de type « paysage » pour représenter la synthèse de tous les différents cas. C'est la raison pour laquelle il existe une 2e fiche d'analyse combinatoire que tu peux télécharger !