FICHE 5.8 : COMMENT DÉRIVER DES OPÉRATIONS DE FONCTIONS ?

Mise à jour : 22/02/12

Maintenant que tu connais le catalogue des fonctions dont **il faut** savoir la dérivée, tu peux t'attaquer à des dérivées plus ardues qui consiste en des dérivées d'opérations mathématiques.

1. Dérivée d'une somme ou d'une différence de fonctions

Très facile. En effet,

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : $(f + g)' = f' + g'$
La dérivée d'une différence est la différence des dérivées : $(f - g)' = f' - g'$

Ça veut dire quoi ? Tout simplement que :

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - x^2 + \sin x - \ln x\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (x^2)' + (\sin x)' - (\ln x)'$$

Il suffit donc d'effectuer chacune des dérivées de manière individuelle ! D'où l'importance des dérivées de fonctions de base. Plus simple que ça, tu meurs ;-)

2. Dérivée d'un produit de fonctions

Là, ça se complique un peu… Assez naïvement, tu pourrais croire que la dérivée d'un produit est le produit des dérivées. Autrement dit : $(x^2 . \sin x)' = (x^2)' . (\sin x)'$

ATTENTION ! C'est tout à fait FAUX ! C'est une erreur classique !
La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Comment faire alors ? Là, nous sommes obligés de sortir une formule de notre chapeau magique. Cette formule se démontre (bien entendu) mais, comme tu le sais, ce n'est pas l'objet de ces fiches. En fait :

$$(x^2 . \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$$

Eh oui, pour dériver un produit de deux facteurs, tu dois dériver le premier facteur et le multiplier avec le deuxième (sans le dériver !) et dériver le deuxième et le multiplier avec le premier (sans le dériver) et … additionner les deux résultats. Ouf ! Rassure-toi, c'est beaucoup plus compliqué à écrire (en français) qu'à réaliser.

Mathématiquement, c'est encore plus simple :

$$(f \,.\, g)' = f'\, g + f\, g'$$

On peut même étendre cette règle :

$$(f \,.\, g \,.\, h)' = f'\, g\, h + f\, g'\, h + f\, g\, h'$$

Le problème est que beaucoup d'étudiants oublient cette règle ! Du coup, ils obtiennent des résultats tout à fait faussés !

<u>Remarque importante</u>

Si tu es confronté à la dérivée de $3x^2$, il s'agit bien du produit de 3 et de x^2. On peut bien entendu utiliser la formule générale d'un produit $(3x^2)' = (3)'\, x^2 + 3\, (x^2)'$. Mais comme la dérivée de 3 est nulle, on obtient que $(3x^2)' = 3\, (x^2)'$. <u>C'est une règle que tu peux appliquer chaque fois qu'un des termes du produit est une constante !</u>

Ainsi, $(7x^2)' = 14\, x$ puisque

$$\begin{aligned}(7x^2)' &= 7\, (x^2)' \\ &= 7 \,.\, 2x \\ &= 14\, x\end{aligned}$$

$\left(\frac{x^3}{4}\right)' = \frac{3}{4} x^2$ puisque

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{4}\right)' &= \frac{1}{4} (x^3)' \\ &= \frac{1}{4}\, 3\, x^2\end{aligned}$$

$\left(-\frac{\sqrt{x}}{4}\right)' = -\frac{1}{8\sqrt{x}}$ puisque

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\sqrt{x}}{4}\right)' &= -\frac{1}{4} (\sqrt{x})' \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$(k\, f)' = k\, f' \quad (k \in \mathbb{R})$$

3. Dérivée d'un quotient de fonctions

Évidemment, si tu viens de lire attentivement le point précédent, tu devines sans doute que la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées ! En effet, pour dériver un quotient, il faut appliquer la procédure suivante (on te fait le cadeau de ne pas décrire ce processus en français ;-))

$$\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{(x^2)' \sin x - x^2 (\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

De manière générale,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$$

4. Composée de fonctions

Une opération très simple … quand on l'a bien comprise. C'est aussi une source d'erreurs pour beaucoup d'étudiants. Nous espérons que les explications de cette fiche te permettront d'éviter ces erreurs désormais classiques. Sinon, n'oublie pas que tu peux venir poser tes questions et demander des éclaircissements sur notre forum.

La composée de fonctions est le fait de « combiner » deux fonctions (le mot exact est bien entendu « composer »). Voici trois exemples bien concrets :

1)	$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$: tu composes la fonction $\sqrt{x}$ avec la fonction $x^2 - 3x + 2$
2)	$\sin(x^2 - 3x + 2)$: tu composes la fonction $\sin x$ avec la fonction $x^2 - 3x + 2$
3)	$(x^2 - 3x + 2)^3$: tu composes la fonction x^3 avec la fonction $x^2 - 3x + 2$

Quand tu es face à une composée, il faut ensuite déterminer quelle est la dernière étape de la composée. C'est-à-dire, la dernière étape que tu ferais avec une calculatrice pour calculer l'image d' une valeur donnée. Supposons que pour les 3 exemples ci-dessus, tu veuilles calculer l'image de 5.

	x	$x^2 - 3x + 2$	$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$	$\sin(x^2 - 3x + 2)$	$(x^2 - 3x + 2)^3$
1)	5	$5^2 - 3.5 + 2 = 12$	$\sqrt{12}$		
2)	5	$5^2 - 3.5 + 2 = 12$		$\sin 12$	
3)	5	$5^2 - 3.5 + 2 = 12$			$(12)^3$

Pour

L'exemple 1 : ta dernière étape est donc l'appui sur la touche RACINE CARRÉE de ta calculatrice.
L'exemple 2 : ta dernière étape est donc l'appui sur la touche SINUS de ta calculatrice.
L'exemple 3 : ta dernière étape est donc l'appui sur la touche CUBE de ta calculatrice.

Pourquoi est-ce important ? Parce que tu vas toujours dériver en premier lieu la dernière étape de la composée. Observe bien les exemples.

$$\left(\sqrt{(x^2 - 3x + 2)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{(x^2 - 3x + 2)}} (x^2 - 3x + 2)'$$

Pourquoi $\frac{1}{2\sqrt{(x^2 - 3x + 2)}}$? Parce que la dernière étape de la composée est $\sqrt{x}$. Or $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Pourquoi multiplier par $(x^2 - 3x + 2)'$? Ça se démontre en théorie… mais ce n'est de nouveau pas l'ojet de cette fiche. <u>Ce que nous pouvons te dire, c'est que beaucoup d'étudiants oublient cette fameuse multiplication ! Elle sera pourtant toujours nécessaire !</u>

$$\left(\sin (x^2 - 3x + 2)\right)' = \cos (x^2 - 3x + 2) (x^2 - 3x + 2)'$$

Pourquoi $\cos (x^2 - 3x + 2)$? Parce que la dernière étape de la composée est $\sin x$. Or $(\sin x)' = \cos x$
Pourquoi multiplier par $(x^2 - 3x + 2)'$? Pour la même raison que ci-dessus.

$$\left((x^2 - 3x + 2)^3\right)' = 3 (x^2 - 3x + 2)^2 (x^2 - 3x + 2)'$$

Pourquoi $3(x^2 - 3x + 2)^2$? Parce que la dernière étape de la composée est x^3. Or $(x^3)' = 3x^2$
Pourquoi multiplier par $(x^2 - 3x + 2)'$? Pour encore et toujours la même raison : il le faut !

Encore quelques exemples ? *(N'hésite pas à imprimer en couleur, ce sera plus facile pour comprendre)*

a) $(\ln(x^2 + 3x - 1))' = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 1} \cdot (x^2 + 3x - 1)'$ car $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

b) $(\cos(2x + 4))' = -\sin(2x + 4) \cdot (2x + 4)'$ car $(\cos x) = -\sin x$

c) $(\sqrt[3]{\sin x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(\sin(x))^2}} \cdot (\sin x)'$ car $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Évidemment, il est tout à fait permis de composer plusieurs fois…

$$\left([\sin(3x^2 + 5x - 4)]^2\right)' = 2\sin(3x^2 + 5x - 4)\,(\sin(3x^2 + 5x - 4))'$$

Car la dernière opération mathématique est la mise au carré. Donc, tu commences par dériver la fonction x^2. Or $(x^2)' = 2x$. On peut dire en langage simplifié que la dérivée d'un objet au carré vaut « 2 fois l'objet multiplié par la dérivée de l'objet ». Dans notre cas, l'objet vaut $\sin(3x^2 + 5x - 4)$.

Ensuite, il faut encore calculer $(\sin(3x^2 + 5x - 4))' = \cos(3x^2 + 5x - 4) \cdot (3x^2 + 5x - 4)'$

Car la dernière opération mathématique est le sinus de l'expression. Or la dérivée de $(\sin x)$ vaut $(\cos x)$. On peut dire en langage simplifié que la dérivée du sinus d'un objet vaut « le cosinus de l' objet multiplié par la dérivée de l'objet ». Dans notre cas, l'objet vaut $(3x^2 + 5x - 4)$.

Finalement, on trouve donc que :

$$((\sin(3x^2 + 5x - 4))^2)' = 2\sin(3x^2 + 5x - 4)\cos(3x^2 + 5x - 4) \cdot (6x + 5)$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Comme tu l'as sûrement déjà constaté, il existe des raccourcis mathématiques qui sont … malheureux car ils accentuent l'incompréhension. En voici encore un : tu trouveras rarement

l'écriture $(\sin(3x + 2))^2$. C'est pourtant l'écriture la plus logique mais comme elle est un peu lourde au niveau des parenthèses, on a préféré <u>par convention</u> écrire $\sin^2(3x + 2)$. Mais tu dois savoir que ce n'est qu'une convention…

Or, cette écriture rend la dernière étape de la composée plus difficile à repérer. Si tu éprouves des difficultés à dériver, n'hésite donc pas dans un premier temps à préférer la 1ère écriture.

Voilà, la composée était la dernière opération de fonctions à maîtriser. En principe, si tu connais les dérivées des fonctions de base (fiche 5.6), tu es fin prêt pour toutes les dérivées que ton prof te soumettra. Il te faut juste peut-être encore un peu d'entraînement.

<u>Une dernière remarque</u> : il n'est pas rare de constater dans certains formulaires de dérivées le double de formules réellement nécessaires. Précisément à cause de l'opération composée. Dans un formulaire consacré aux dérivées trigonométriques, tu peux trouver :

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

et

$f(x) = \sin f(x)$	$f'(x) = \cos f(x)\, f'(x)$
$f(x) = \cos f(x)$	$f'(x) = -\sin f(x)\, f'(x)$
$f(x) = \tan f(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\, f'(x)$
$f(x) = \cot f(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 f(x)}\, f'(x)$

Les formules du tableau de droite n'ont aucune raison d'être écrites ! Il s'agit tout simplement de l'application de la dérivée d'une composée de fonctions. Ce n'est qu'une répétition de la formule adaptée à chaque dérivée.

Tu n'as pas compris quelque chose ? Aide-nous à améliorer ces fiches !
Tu cherches des sujets que tu n'as pas trouvés ? Dis-le nous !
Découvre aussi notre forum sur lequel tu peux venir poser tes questions.

N'hésite pas à nous faire connaître : <u>totalement gratuit</u>.

Commentaires, souhaits, remarques…
On t'attend sur notre groupe Facebook !
« Centre de remédiation scolaire Entr'aide »