FICHE 5.6 : COMMENT DÉRIVER LES FONCTIONS DE BASE ?

Mise à jour : 21/02/12

Après avoir compris ce qu'est une dérivée, il faut évidemment ne pas rater la pratique. C'est bien de comprendre « à quoi ça sert », mais il faut aussi savoir « comment faire ».

Première chose, il est extrêmement important de connaître les formules encadrées ci-dessous. Sans elles, tu seras complètement perdu. Pour envisager des dérivées plus ardues, d'abord **il faut maîtriser** les dérivées basiques. Évidemment, pour que tu aies plus facile, nous avons rassemblé les dérivées par famille de fonctions.

1. Dérivées de fonctions polynomiales élémentaires

$f(x) = 7$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
…	…

Bref : $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

Exemple : $(x^{27})' = 27\,x^{26}$

2. Dérivées des inverses des fonctions polynomiales élémentaires

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$f'(x) = \frac{-3}{x^4}$
$f(x) = \frac{1}{x^4}$	$f'(x) = \frac{-4}{x^5}$
…	…

Bref : $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$

Exemple : $\left(\frac{1}{x^{27}}\right)' = \frac{-27}{x^{28}}$

3. Dérivées de fonctions racine carrée, racine cubique…

$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x) = \sqrt[4]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$
…	…

Bref : $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Exemple : $\left(\sqrt[27]{x}\right)' = \frac{1}{27\sqrt[27]{x^{26}}}$

ATTENTION :

Les étudiants les plus attentifs croiront peut-être que la dernière formule énoncée n'est pas valable pour le premier cas f(x) = $\sqrt{x}$. Puisqu'on pourrait croire, effectivement, que dans cet exemple n = 1. C'est malheureusement faux. Il y a parfois des raccourcis d'écriture qui sont de véritables pièges. En effet $\sqrt{x}$ se lit « racine carrée de x » et donc, même s'il n'y a rien d'écrit « dans le radical » , il faut y lire un « 2 ». L'écriture exacte de $\sqrt{x}$ est en fait $\sqrt[2]{x}$. Et donc, la formule est valable pour tous les cas…

4. Dérivées des inverses des fonctions racine carrée, racine cubique….

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$	$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$
…	…

Bref : $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{-1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$

Exemple : $\left(\frac{1}{\sqrt[27]{x}}\right)' = \frac{-1}{27\sqrt[27]{x^{28}}}$

Synthèse de ces 4 formules de dérivées

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{-1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$

Remarque importante.

Si tu as une bonne mémoire, tu peux retenir les 4 formules ci-dessus. Elles te permettront de dériver ce type d'expressions facilement et sans erreur. **MAIS** si tu te souviens de deux notations algébriques, ces 4 formules peuvent pourtant se résumer à la toute première.

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

En effet. Souviens-toi, en troisième année, tu as rencontré les notations suivantes :

$$\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} \qquad \frac{1}{x^p} = x^{-p}$$

En utilisant ces notations, tu peux ne retenir qu'une seule formule : $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

<u>Par exemples :</u>

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)'$$

$$= \frac{1}{4}\,x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\,x^{\frac{-3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{3/4}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{\frac{-1}{3}}\right)'$$

$$= \frac{-1}{3}\,x^{\left(\frac{-1}{3}-1\right)}$$

$$= \frac{-1}{3}\,x^{\frac{-4}{3}}$$

$$= \frac{-1}{3}\,\frac{1}{x^{4/3}}$$

$$= \frac{-1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

C'est un peu plus long, mais tu ne dois retenir qu'une seule formule de dérivée ! À toi de voir !

L'avantage de connaître ces deux notations algébriques, c'est que tu peux te permettre de dériver des expressions comme $\sqrt[4]{x^5}$, ce que tu n'aurais pas pu faire avec les formules précédentes.

$$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'$$

$$= \frac{5}{4}\,x^{\left(\frac{5}{4}-1\right)}$$

$$= \frac{5}{4}\,x^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{5}{4}\,\sqrt[4]{x}$$

5. Dérivées de fonctions trigonométriques

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

6. Dérivées de fonctions trigonométriques réciproques

$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arccot}\, x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

7. Dérivées de fonctions exponentielles et logarithmes

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{\ln a}$

Pour la plupart des étudiants, le catalogue des dérivées à connaître s'arrête ici. Mais en math 6h ou en math 8h, il arrive que des enseignants utilisent les dérivées relatives à la trigonométrie hyperbolique. Sans effrayer personne, nous les indiquons juste au cas où tu en aurais besoin.

8. Dérivées de fonctions hyperboliques (hors programme)

$f(x) = \text{sh } x$	$f'(x) = \text{ch } x$
$f(x) = \text{ch } x$	$f'(x) = \text{sh } x$
$f(x) = \text{th } x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$
$f(x) = \text{coth } x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\text{sh}^2(x)}$

9. Dérivées de fonctions hyperboliques réciproques (hors programme)

$f(x) = \text{argsh } x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \text{argch } x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{argth } x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \text{argcoth } x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Là, nous en avons terminé pour le catalogue des fonctions dont il faut connaître la dérivée. « Il ne te reste plus » qu'à maîtriser les dérivées d'opérations !

Tu n'as pas compris quelque chose ? Aide-nous à améliorer ces fiches !
Tu cherches des sujets que tu n'as pas trouvés ? Dis-le nous !
Découvre aussi notre forum sur lequel tu peux venir poser tes questions.

N'hésite pas à nous faire connaître : totalement gratuit.

Commentaires, souhaits, remarques…
On t'attend sur notre groupe Facebook !
« Centre de remédiation scolaire Entr'aide »