FICHE 5.5 : DOMAINE ET CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE FONCTION

Mise à jour : 20/12/11

Pour commencer, il est peut-être bon de rappeler que le domaine d'une fonction est l'ensemble des points où la fonction existe.

Prenons, par exemple, la fonction carré ($f(x) = x^2$). Le domaine de cette fonction est l'ensemble des réels puisqu'on peut mettre n'importe quel nombre réel au carré.

Si tu choisis la fonction cube ($f(x) = x^3$), le domaine est toujours $\mathbb{R}$ puisque de nouveau, tu peux mettre n'importe quel nombre réel au cube.

Considérons maintenant la fonction racine carrée ($f(x) = \sqrt{x}$). Une première difficulté apparait puisqu' « **On ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif »**. (Ecrire $\sqrt{-3}$ reviendrait à chercher un nombre y tel que $y^2 = -3$, ce qui est impossible puisque tout nombre au carré est toujours positif ou nul). Il faut donc que ce nombre « x » soit positif ou nul. Le domaine est donc tous les nombres supérieurs ou égaux à 0, ce qui se note $\mathbb{R}^+$.

À présent, considérons $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Voici la deuxième difficulté : « **On ne peut jamais diviser par zéro** ». Il faut donc que le dénominateur soit différent de 0. En l'occurrence, il faut donc dans ce cas que $x \neq 2$. Le domaine est donc $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Retiens donc bien que

- Une racine carrée ne peut jamais être négative
- On ne peut jamais diviser par zéro

En 5e année, très souvent dans les exercices d'analyse, tu seras confronté(e) aux différents cas suivants. On suppose ici que les fonctions f et g sont des fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de conditions d'existence intrinsèques liées à ces fonctions (c'est souvent le cas quand on te propose ce genre d'exercices)

- **CAS 1**

  $\sqrt{f(x)}$

  Dans un premier temps, il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. Cela peut être plus ou moins difficile suivant l'expression de f(x). Si f(x) est un polynôme du premier degré, cela revient à traiter une inéquation « toute simple ». Si c'est du second degré ou plus, il faut alors faire un tableau de signe. Si f(x) n'est pas un polynôme, il faut voir au cas par cas.

- **CAS 2**

  $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

  Il faut alors résoudre $g(x) \neq 0$

- **CAS 3**

  $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$

  Il y a deux choses indépendantes à faire. La première c'est résoudre $f(x) \geq 0$. La deuxième, c'est résoudre $g(x) > 0$. Ensuite, **pour obtenir la solution finale**, il faut regarder « ce qu'il y a en commun » entre les deux ensembles de solutions obtenues. À ne pas confondre avec le cas suivant…

- **CAS 4**

  $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

  Cet exercice est souvent confondu avec le cas précédent ! Ici il faut résoudre l'inéquation $f(x)/g(x) \geq 0$. Pour cela, il faut établir un grand tableau de signe dans lequel on va indiquer le signe de $f(x)$, le signe de $g(x)$ et enfin le signe de $f(x)/g(x)$.

- **CAS 5**

  $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$

  Il suffit que $g(x) > 0$

- **CAS 6**

  $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$

  Il faut ici que $g(x) \neq 0$ **ET** $f(x) \geq 0$. Ce sont de nouveau deux cas à traiter séparément et comme pour le cas 3, **pour obtenir la solution finale**, il faut regarder « ce qu'il y a en commun » entre les deux ensembles de solutions obtenues.

Un petit exemple numérique pour y voir plus clair ? Tes souhaits sont exaucés !

Prenons $f(x) = x^2 - 5x + 6$ et $g(x) = -x + 4$. Tout d'abord, vérifions bien que ces deux fonctions aient pour domaine l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$). Ce sont deux fonctions polynômiales *(f est du second degré et g est du premier degré)*, le domaine est donc bien $\mathbb{R}$.

$\sqrt{-x+4}$

Nous sommes devant le cas 1. Il faut résoudre l'inéquation : $-x + 4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 4$. Le domaine est donc $]-\infty, 4]$

$\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

C'est toujours le cas 1. Cependant, l'inéquation à résoudre est du second degré : $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Il faut donc réaliser un tableau de signe. Pour ce faire, il faut d'abord calculer les racines. Ici, ce sont 2 et 3.

		2		3	
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

On peut lire alors la réponse dans ce tableau. Il suffit de prendre les images positives et nulles de la fonction, c'est-à-dire là où il y a les « + » et les « 0 ». Donc, le domaine est $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{-x + 4}$

C'est le cas 2. Il faut que le dénominateur soit différent de 0. Donc $-x + 4 \neq 0$. Et donc $x \neq 4$. Le domaine est donc $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\dfrac{-x + 4}{x^2 - 5x + 6}$

C'est toujours le 2e cas. Il faut toujours que le dénominateur soit différent de 0. Il faut donc résoudre $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Il faut donc calculer les racines (méthode du **delta** ou de **Produit et Somme**) et les rejeter du domaine. Ici, les racines sont 2 et 3. Le domaine est donc $\mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

$\dfrac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Tu l'as bien entendu deviné, nous traitons ici le 3e cas. Il faut donc effectuer 2 calculs <u>indépendants</u>. Le premier, c'est résoudre $-x + 4 \geq 0$. Nous l'avons déjà résolu dans le premier exemple, cela donne $x \leq 4$. Ensuite, il faut résoudre séparément, $x^2 - 5x + 6 > 0$. En utilisant le tableau de signe établi dans le 2e exemple, on trouve que $x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$. Il faut maintenant rassembler la condition 1 et la condition 2, cela donne $x \in]-\infty, 2[\cup]3, 4]$.

$\sqrt{\dfrac{-x + 4}{x^2 - 5x + 6}}$

Voici le 4e cas. Comme dit précédemment, à ne pas confondre avec l'exercice ci-dessus. Tu dois faire un tableau de signe général du quotient et prendre dans ce tableau le abscisses dont les images sont positives ou nulles. C'est-à-dire là où il y a les « + » et les « 0 ».

		2		3		4	
$-x+4$	+	+	+	+	+	0	-
x^2-5x+6	+	0	-	0	+	+	+
$\sqrt{\frac{-x+4}{x^2-5x+6}}$	+	IMP	-	IMP	+	0	-

Le domaine est donc $]-\infty, 2[\cup]3, 4]$

$$\frac{-x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

5e situation : il faut que le dénonimateur soit strictement supérieur à zéro vu la présence du radical. Comme le radicand est un polynôme du second degré, il faut utiliser un tableau de signe.

		2		3	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Cette fois-ci, on ne peut donc prendre que les « + ». Le domaine est donc $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

$$\frac{\sqrt{-x+4}}{x^2-5x+6}$$

Dernier cas de figure. Il y a <u>deux calculs séparés</u> à effectuer. D'abord résoudre $-x+4 \geq 0$. Ce qui a déjà été fait dans l'exemple 1 et donne comme réponse $]-\infty, 4]$. Ensuite il faut que le dénominateur soit différent de 0, ce qui a déjà été fait dans l'exemple 4. Cela donne comme réponse $\mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. En rassemblant la condition 1 et la condition 2, tu trouves que le domaine est $]-\infty, 4] \setminus \{2,3\}$.

Tu n'as pas compris quelque chose ? Aide-nous à améliorer ces fiches !
Tu cherches des sujets que tu n'as pas trouvés ? Dis-le nous !
Découvre aussi notre forum sur lequel tu peux venir poser tes questions.

N'hésite pas à nous faire connaître : <u>totalement gratuit</u>.

Commentaires, souhaits, remarques…
On t'attend sur notre groupe Facebook !
« Centre de remédiation scolaire Entr'aide »