

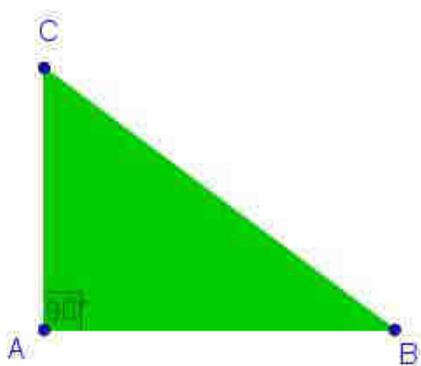
FICHE 4.4 : AUTOUR DES TRIANGLES

Mise à jour : 12/12/11



1. THÉORÈMES DE PYTHAGORE : LE PETIT ET LE GRAND

Commençons par le théorème le plus célèbre : le petit théorème de Pythagore. Pourquoi le « petit » ? Parce que celui-ci n'est valable que dans un triangle rectangle !

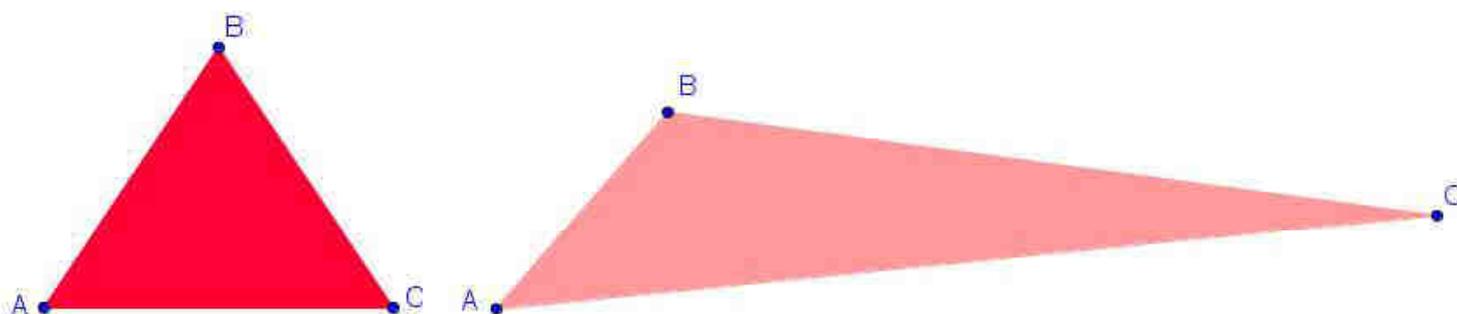


Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit :

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$$

Le grand théorème de Pythagore (appelé aussi parfois théorème d'Al-Kashi ou théorème des cosinus) est lui valable dans tout triangle.



Il commence de la même manière que le petit théorème de Pythagore mais comme le triangle n'est plus rectangle, l'énoncé est complété :

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 |AC| |AB| \cos \hat{A}$$

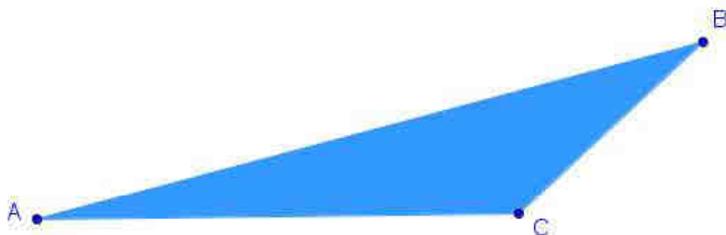
Et comme il n'y a plus d'hypoténuse, il n'y a pas non plus de côtés privilégiés. On a donc aussi

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 - 2 |BC| |AB| \cos \hat{B}$$

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 |AC| |BC| \cos \hat{C}$$

2. THÉORÈME DES SINUS

Dans tout triangle, nous avons la double égalité suivante



$$\frac{\sin \widehat{A}}{|BC|} = \frac{\sin \widehat{B}}{|AC|} = \frac{\sin \widehat{C}}{|AB|}$$

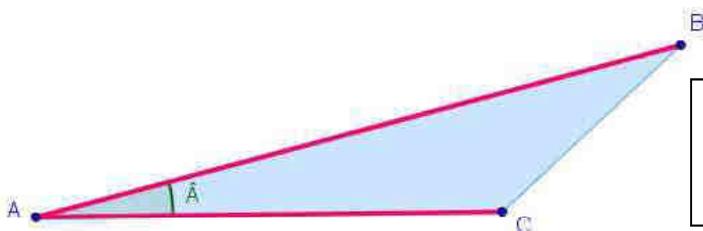
Bien évidemment, on peut aussi l'écrire

$$\frac{|BC|}{\sin \widehat{A}} = \frac{|AC|}{\sin \widehat{B}} = \frac{|AB|}{\sin \widehat{C}}$$

3. THÉORÈME DU CALCUL DE L'AIRES D'UN TRIANGLE

Je suis certain qu'en voyant cet énoncé, tu te dis : ça, je m'en souviens. Formule bien ancrée dans les mémoires : pour calculer l'aire d'un triangle : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

Elle est juste, bien entendu. Mais ce n'est pas la formule qui est la plus fréquemment utilisée car elle a un inconvénient : il faut connaître une des hauteurs relative à la base considérée ! Il existe donc une autre formule qui est beaucoup plus simple d'utilisation : faire le demi-produit des longueurs de deux côtés adjacents multipliés par le sinus de l'angle formé par ces deux côtés ! Pas de panique, la formulation en français apparaît toujours plus compliquée que sa formulation mathématique. Regarde, tu vas comprendre :



$$\text{Aire du triangle ABC} = \frac{|AC| |AB| \sin \widehat{A}}{2}$$

De nouveau, comme il n'y a pas de côtés privilégiés, on peut aussi écrire

$$\text{Aire du triangle ABC} = \frac{|BA| |BC| \sin \widehat{B}}{2}$$

$$\text{Aire du triangle ABC} = \frac{|CA| |CB| \sin \widehat{C}}{2}$$