FICHE 3.1 : MÉTHODE DE HORNER

Mise à jour : 12/12/11

La méthode dite de Horner (William George Horner 1786-1837) est une méthode très pratique utilisée pour factoriser un polynôme. Elle possède toutefois un inconvénient majeur, c'est que pour l'exploiter, **tu dois connaître au moins une racine entière du polynôme** (c'est la valeur qui annule le polynôme).

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

- Dans un premier temps, il faut donc que tu détermines un entier « x » qui annule le polynôme, c'est-à-dire tel que P(x) = 0. Nous dirons que « x » est une racine du polynôme. Dans le cas qui nous concerne, l'entier « 1 » est une des racines du polynôme puisque P(1) = 0.

  Une racine entière d'un polynôme est toujours un diviseur du terme indépendant. Dans l'exemple, les racines entières à envisager sont ± 1, ± 2, ± 4 car le terme indépendant est « -4 ».

- Dans un deuxième temps, tu vas élaborer un tableau constitué de trois lignes. Avant de placer la moindre valeur numérique, veille à **ordonner et compléter le polynôme**.

  Pour rappel, un polynôme est **ordonné** par rapport à une variable s'il contient toutes les puissances de cette variable à partir de la plus élevée. Par exemple $P(x) = x^4 - x^2 + 3x^3$ n'est pas ordonné. En effet, l'écriture ordonnée est $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2$.

  Un polynôme de degré n est **complet** lorsque la variable x figure à toutes les puissances égales ou inférieures à n en n'oubliant pas le terme indépendant. Par exemple $P(x) = x^4 + 3x^3 - x + 1$ n'est pas complet, alors que $P(x) = x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x + 1$ l'est.

  À la première ligne, place les coefficients des différents termes du polynôme. À la deuxième ligne (première colonne), place la racine entière déterminée :

	2	-3	5	-4
1				

Afin de compléter le tableau, il suffit d'abaisser à la troisième ligne le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme (ici le 2).

	2	-3	5	-4
1				
	2			

Ensuite, multiplie ce nombre par la racine (nombre en rouge) : 2 x 1 = 2. Écris alors ce résultat en dessous du nombre en vert. Cela donne :

	2	-3	5	-4
1		2 *(2 x 1)*		
	2			

Ensuite, additionne le nombre en vert à celui que l'on vient d'obtenir (-3 + 2 = -1) :

	2	-3	5	-4
1		2 *(2 x 1)*		
	2	-1 *(-3 + 2)*		

On recommence alors le même processus pour toutes les colonnes restantes :

	2	-3	5	-4
1		2 *(2 x 1)*	-1 *(-1 x 1)*	4 *(4 x 1)*
	2	-1 *(-3 + 2)*	4 *(5 + (-1))*	0 *(-4 + 4)*

Sois attentif d'obtenir 0 en fin d'opérations ! Dans le cas contraire, vérifie tes calculs car une erreur a été commise : tu dois toujours obtenir 0 !

Les trois nombres (en orange) obtenus à la dernière ligne sont les coefficients du **polynôme quotient**. Ce polynôme quotient est toujours un degré en dessous du polynôme à factoriser. Ainsi, dans notre exemple, puisque le polynôme à factoriser était de degré 3, le polynôme quotient sera donc de degré 2. Il s'écrira $Q(x) = 2x^2 - x + 4$.

Tu es presqu'au bout du processus. L'écriture factorisée de P(x) n'est rien d'autre que le polynôme quotient multiplié par (x – racine). Autrement écrit : P(x) = Q(x). (x – « racine »)

Nous obtenons donc la factorisation : $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = (2x^2 - x + 4) . (x - 1)$.

Une erreur courante est de multiplier $(2x^2 - x + 4)$ par $(x + 1)$ à la place de $(x - 1)$. Il convient bien de multiplier par (x - racine).

Pour terminer, nous te proposons un exemple d'application de factorisation par la méthode de Horner relativement à un polynôme incomplet.

Soit $P(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$. Les racines entières à envisager sont ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6 puisque le terme indépendant est « - 6 » et que toute racine entière doit diviser le terme indépendant. Tu peux aisément constater que -1, -2 et 3 sont des racines du polynômes, c'est-à-dire que P(-1) = 0 ainsi que P(-2) et P(3). Tu peux donc utiliser l'une de ces trois valeurs. Choisissons la racine x = 3. Tu obtiens le tableau de factorisation suivant :

	1	0	-6	-6	-7	-6
3		3 *(3 x 1)*	9 *(3 x 3)*	9 *(3 x 3)*	9 *(3 x 3)*	6 *(3 x 2)*
	1	3 *(0 + 3)*	3 *(-6 + 9)*	3 *(-6 + 9)*	2 *(-7 + 9)*	0 *(-6 + 6)*

Le polynôme P(x) se factorise donc sous la forme : $(x - 3)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$. Bien entendu, ton professeur risque de te demander d'aller le plus loin possible dans la factorisation. On recommence donc la méthode avec $(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$. Il vient alors :

	1	3	3	3	2
-2		-2 *(-2 x 1)*	-2 *(-2 x 1)*	-2 *(-2 x 1)*	-2 *(-2 x 1)*
	1	1 *(3 - 2)*	1 *(3 - 2)*	1 *(3 - 2)*	0

Le polynôme de départ P(x) se factorise donc sous la forme : $(x - 3)(x + 2)(x^3 + x^2 + x + 1)$. On continue ensuite avec le polynôme $(x^3 + x^2 + x + 1)$. Il vient alors :

	1	1	1	1
-1		-1	0	-1
	1	0	1	0

Le polynôme P(x) se factorise finalement sous la forme : $(x - 3)(x + 2)(x + 1)(x^2 + 1)$. Tu pourrais essayer de trouver une racine entière pour $x^2 + 1$ *(les seuls candidats possibles sont ± 1),* mais tu peux très vite constater qu'aucun de ces candidats n'annule $x^2 + 1$. De façon plus générale, sache qu'une somme de deux carrés n'est jamais factorisable dans les réels.

<u>Remarque</u>

Si tu ne trouves pas de racine entière au polynôme qu'on te propose, c'est que le polynôme proposé n'est pas factorisable avec la méthode de Horner ! *(C'est l'inconvénient de cette méthode soulevé au début de cette fiche)*. Simple, non ?