FICHE 5.4 : UN CHANGEMENT DE VARIABLE…

Mise à jour : 12/12/11

Parfois, il peut t'arriver d'avoir affaire à une équation qui – sous un premier regard – parait assez peu comique….

Prenons par exemple, l'équation suivante :

$$\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right)^2 - 3\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right) + 2 = 0 \qquad (1)$$

Bien entendu, avant de vouloir résoudre cette équation, tu ne dois pas oublier les conditions d'existence. Elles sont particulièrement simples puisqu'il suffit que $3x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -2/3$.

Passons maintenant au vif du sujet : la résolution. Une première méthode consisterait à effectuer la puissance et à réduire ensuite chaque terme au même dénominateur. Cependant, cette démarche peut s'avérer longue et fastidieuse… mais si tu es persévérant, attentif et soigneux, tu arriveras à la bonne réponse !

Cependant, au vu de l'énoncé, il y a moyen de faire plus simple ! En effet, cette équation a quand même quelque chose d'étrange. En prenant un peu de recul, cela saute aux yeux : une même expression apparait plusieurs fois…

$$\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right)^2 - 3\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right) + 2 = 0$$

Dans ce cas de figure, il convient alors de poser que $y = \left(\frac{2x-2}{3x+2}\right)$

L'équation devient alors : $y^2 - 3y + 2 = 0$. Nous revenons ainsi à une simple équation du second degré assez facile à résoudre. En appliquant la technique de résolution des équations du second degré, tu trouves deux solutions $y = 2$ ou $y = 1$.

Afin de déterminer les solutions de l'équation (1), il faut alors « **déposer** ».

$y = 2$	*OU*	$y = 1$
$\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right) = 2$	*OU*	$\left(\frac{2x-2}{3x+2}\right) = 1$
$2x - 2 = 6x + 4$	*OU*	$2x - 2 = 3x + 2$

$-4x = 6$	**OU**	$-x = 4$
$x = -\frac{3}{2}$	**OU**	$x = -4$

C'est une technique qui est très régulièrement utilisée en algèbre ! Voici d'autres exemples d'équations à résoudre pour lesquelles tu peux procéder de la sorte.

Exemple 1 : $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$

C'est un classique du genre. On pose alors $y = x^2$ et l'équation de départ devient donc : $y^2 - 2y + 2 = 0$

Exemple 2 : $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$

C'est un autre classique. On pose alors $y = x^3$ et l'équation de départ devient donc : $y^2 - 2y + 2 = 0$

Exemple 3 : $x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

On pose alors $y = x^2$ et l'équation de départ devient donc :
$y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$. Ce n'est plus une équation du second degré donc, pour la résoudre, il faut utiliser la méthode de Hornër.

Exemple 4 : $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

Toujours le même principe. On pose alors $y = \cos x$ et l'équation de départ devient donc : $y^2 - 2y + 1 = 0$

Exemple 5 : $2\log^2(x-2) - 5\log(x-2) + 3 = 0$

Comme toujours : on pose alors $y = \log(x-2)$ et l'équation de départ devient donc : $2y^2 - 5y + 3 = 0$